

- ۱- معادله درجه دوم $\circ = 2(a+b)x^2 - 2(a+b+c)x + c$ ، به ازاء هر $a, b, c \in R$ چگونه است؟
 (۱) ریشه حقیقی ندارد. (۲) ریشه مضاعف دارد. (۳) دو ریشه حقیقی دارد. (۴) هیچ یک از موارد قبل
- ۲- در معادله $\circ = 4x^2 - 16x + m$ یکی از ریشه ها سه واحد بزرگتر از ریشه دیگر است، ریشه بزرگتر کدام است؟
 (۱) $\frac{7}{2}$ (۲) $\frac{5}{2}$ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) $\frac{1}{2}$
- ۳- اگر x' و x'' ریشه های معادله $\circ = x^2 - 5x + m$ بوده و $\circ = x'x'' + x'^2$ باشد، مقدار $x'^2 + x''^2$ کدام است؟
 (۱) ۱۹۳ (۲) ۱۴۳ (۳) ۱۹۵ (۴) ۱۴۵
- ۴- اگر x' و x'' ریشه های معادله $\circ = x^2 - 3x + 1$ باشند، حاصل $\sqrt{\frac{x'}{x''}} + \sqrt{\frac{x''}{x'}}$ کدام است؟
 (۱) -۳ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۲
- ۵- به ازای کدام مقدار m ، معادله درجه دوم $\circ = 6 - mx^2 + 5x + m^2$ ، دو ریشه حقیقی و معکوس هم دارد؟
 (۱) -۳ (۲) -۲ (۳) ۲ (۴) ۳
- ۶- اگر a یکی از ریشه های معادله $\circ = x^2 - 3x + 1$ باشد، حاصل $(a + \frac{1}{a})^3$ کدام است؟
 (۱) ۸ (۲) ۲۷ (۳) $2\sqrt{2}$ (۴) $3\sqrt{3}$
- ۷- اگر ریشه های معادله $\circ = (m-2)x^2 + x - 2m$ ، عکس ریشه های معادله $\circ = (m+3)x^2 - x + 2 - m$ باشد، مقدار m کدام است؟
 (۱) ۳ (۲) ۱ (۳) $-\frac{1}{2}$ (۴) -۲
- ۸- به ازاء چه تعداد از مقادیر a ، معادله $\circ = (a-1)x^2 + (3a^2 - 2a^2 - a)x - a$ دو ریشه قرینه دارد؟
 (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳
- ۹- معادله $\circ = x^4 - 3x^2 + 1$ چند ریشه دارد و مجموع مجذورات ریشه ها چقدر است؟
 (۱) دو ریشه و سه (۲) دو ریشه و شش (۳) چهار ریشه و سه (۴) چهار ریشه و شش
- ۱۰- در معادله $\circ = 3x^2 - 17x + m$ یک ریشه از سه برابر ریشه ی دیگر ۳ واحد بیشتر است، m کدام است؟
 (۱) ۹ (۲) ۱۰ (۳) ۱۲ (۴) ۱۵
- ۱۱- معادله $\circ = \frac{1}{10}(x - \sqrt{x})^2 - \frac{11}{10}(x - \sqrt{x}) + \frac{1}{10}$ چند ریشه حقیقی دارد؟
 (۱) ۴ (۲) ۲ (۳) ۱ (۴) ۳
- ۱۲- به ازاء چه تعداد از مقادیر m نمودار تابع $y = (3 - \frac{x}{m})(mx - 1)$ مماس بر محور x ها است؟
 (۱) ۲ (۲) ۱ (۳) ۳ (۴) صفر
- ۱۳- در معادله درجه دوم $\circ = x^2 - 2x - 4$ ، اگر ریشه ها α و β باشند، حاصل $4\beta^2 + (\alpha^2 - 4)^2$ چقدر است؟
 (۱) ۴۸ (۲) ۱۲ (۳) ۱۶ (۴) ۲۴
- ۱۴- در معادله $\circ = x^2 - 4x + 1$ ، حاصل $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$ چقدر است؟
 (۱) ۶ (۲) $\sqrt{5}$ (۳) ۲ (۴) $\sqrt{6}$
- ۱۵- اگر α و β ریشه های معادله $\circ = 2x^2 - 3x - 4$ باشند، مجموعه جوابهای کدام معادله، به صورت $\left\{ \frac{1}{\alpha} + 1, \frac{1}{\beta} + 1 \right\}$ است؟
 (۱) $\circ = 4x^2 - 5x + 1$ (۲) $\circ = 4x^2 - 3x + 1$ (۳) $\circ = 4x^2 - 5x - 1$ (۴) $\circ = 4x^2 - 3x - 1$

پاسخ نامه تشریحی سوالات

۱- گزینه ۳

از آنجایی که $\Delta' = (a+b+c)^2 - 2(a+b)c = (a+b)^2 + c^2 + 2(a+b)c - 2(a+b)c = (a+b)^2 + c^2 > 0$ معادله $2(a+b)x^2 - 2(a+b+c)x + c = 0$ به ازاء هر $a, b, c \in R$ دارای دو ریشه حقیقی می باشد.

۲- گزینه ۱

فرض می کنیم α و β ریشه های معادله $4x^2 - 16x + m = 0$ باشند، بنا به فرض $\alpha = \beta + 3$ ، از طرفی $\alpha + \beta = 4$ ، پس داریم:

$$\beta + 3 + \beta = 4 \Rightarrow \beta = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{5}{2}$$

۳- گزینه ۱

$x'x'' + x'^2 = 60 \Rightarrow x'(x'' + x') = 60 \Rightarrow 5x' = 60 \Rightarrow x' = 12 \Rightarrow 12x'' + 144 = 60 \Rightarrow x'' = -7 \Rightarrow x'^2 + x''^2 = 193$

۴- گزینه ۲

روش اول:

$$a = \sqrt{\frac{x'}{x''}} + \sqrt{\frac{x''}{x'}} \Rightarrow a^2 = \frac{x'}{x''} + \frac{x''}{x'} + 2 \Rightarrow a^2 = \frac{S^2 - 2P}{P} + 2 \Rightarrow a^2 = \frac{9 - 2}{1} + 2 = 9 \Rightarrow a = 3$$

روش دوم: از آنجایی که $a = c$ است، می باشد. پس $x' = \frac{1}{x''}$ و $x'' = \frac{1}{x'}$ بوده و در نتیجه داریم:

$$\sqrt{\frac{x'}{x''}} + \sqrt{\frac{x''}{x'}} = \sqrt{x' \times \frac{1}{x''}} + \sqrt{x'' \times \frac{1}{x'}} = \sqrt{x'^2} + \sqrt{x''^2} = |x'| + |x''| = x' + x'' = 3$$

توجه کنید که جمع و ضرب ریشه ها مثبت هستند، لذا هر دو ریشه مثبت می باشند.

۵- گزینه ۲

برای آن که معادله $mx^2 + 5x + m^2 - 6 = 0$ دارای دو ریشه حقیقی و معکوس هم باشد، باید

$$a = c \Leftrightarrow \Delta > 0 \Rightarrow m = m^2 - 6 \Rightarrow m^2 - m - 6 = 0 \Rightarrow m = -2 \quad | \Delta m = 3$$

اگر $m = 3$ باشد آن گاه معادله به صورت $3x^2 - 5x + 3 = 0$ در می آید که بوضوح دلتای آن منفی است، پس $m = -2$ است.

۶- گزینه ۲

از آنجایی که $a = c$ بوده و یکی از ریشه ها برابر a است، ریشه دوم معادله برابر $\frac{1}{a}$ بوده و در نتیجه $S^3 = 27 = (a + \frac{1}{a})^3$ می باشد.

۷- گزینه ۴

برای نوشتن معادله درجه دومی که ریشه هایش عکس ریشه های معادله $ax^2 + bx + c = 0$ باشد، باید فقط جای a و c را عوض کنیم ولی مقدار b تغییر نکند. پس ریشه های معادله $2mx^2 - x + 2 - m = 0$ عکس ریشه های معادله $(m-2)x^2 + x - 2m = 0$ است، اما بنا به فرض ریشه های معادله $(m+3)x^2 - x + 2 - m = 0$ نیز عکس ریشه های این معادله است، پس $m+3 = 2m$ بوده و یا $m = 3$ است.

۸- گزینه ۲

کافیست $b = 0$ بوده و $ac < 0$ باشد. پس

$$3a^3 - 2a^2 - a = 0 \Rightarrow a(3a^2 - 2a - 1) = 0 \Rightarrow a = 0 \quad | \Delta a = 1 \quad | \Delta a = -\frac{1}{3}$$

اما به ازاء $a = 0$ و $a = 1$ مقدار ac منفی نخواهد بود، پس این معادله فقط به ازاء یک مقدار a دارای دو ریشه قرینه است.

۹- گزینه ۴

قرار می دهیم $x^2 = t$ ، پس $t^2 - 3t + 1 = 0$ و در نتیجه

$$t_1 = \frac{3 - \sqrt{13}}{2} \gg t_2 = \frac{3 + \sqrt{13}}{2} \Rightarrow x_1 = -\sqrt{\frac{3 - \sqrt{13}}{2}} \gg x_2 = \sqrt{\frac{3 - \sqrt{13}}{2}} \gg x_3 = -\sqrt{\frac{3 + \sqrt{13}}{2}} \gg x_4 = \sqrt{\frac{3 + \sqrt{13}}{2}}$$

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = \frac{3 - \sqrt{13}}{2} + \frac{3 - \sqrt{13}}{2} + \frac{3 + \sqrt{13}}{2} + \frac{3 + \sqrt{13}}{2} = 6$$

۱۰- گزینه ۲

$$\alpha = 3\beta + 3 \gg \alpha + \beta = \frac{17}{3} \Rightarrow \alpha - 3\beta = 3 \gg 3\alpha + 3\beta = 17 \Rightarrow \alpha = 5 \Rightarrow 75 - 85 + m = 0 \Rightarrow m = 10$$

۱۱- گزینه ۲

جمع ضرایب معادله $(x - \sqrt{x})^2 - \frac{11}{10}(x - \sqrt{x}) + \frac{1}{10} = 0$ برابر صفر است، پس

$$x - \sqrt{x} = 1 \quad | \quad x - \sqrt{x} = \frac{1}{10} \Rightarrow x - \sqrt{x} - 1 = 0 \quad | \quad x - 1 = 0 \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \quad | \quad \sqrt{x} = \frac{5 \pm \sqrt{45}}{10}$$

اما جواب های $\sqrt{x} = \frac{5 - \sqrt{45}}{10}$ و $\sqrt{x} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ قابل قبول نیستند.

۱۲- گزینه ۱

برای آنکه تابع $y = (3 - \frac{x}{m})(mx - 1)$ بر محور x ها مماس باشد، باید معادله $(3 - \frac{x}{m})(mx - 1) = 0$ ریشه مضاعف داشته باشد. بدیهی

است که ریشه های معادله اخیر به صورت $x = 3m$ و $x = \frac{1}{m}$ هستند، پس

$$3m = \frac{1}{m} \Rightarrow m^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow m = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$$

۱۳- گزینه ۱

بنا به فرض $\alpha^2 - 4 = 2\alpha$ ، پس

$$(\alpha^2 - 4)^2 + 4\beta^2 = 4\alpha^2 + 4\beta^2 = 4(S^2 - 2P) = 4(4 + 8) = 48$$

۱۴- گزینه ۴

$$\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} = \sqrt{S + 2\sqrt{P}} = \sqrt{4 + 2} = \sqrt{6}$$

۱۵- گزینه ۳

باید معادله درجه دوم بنویسیم که ریشه های آن از عکس ریشه های معادله $2x^2 - 3x - 4 = 0$ یک واحد بیشتر باشد.

$$2x^2 - 3x - 4 = 0 \xrightarrow{a \leftrightarrow c} -4x^2 - 3x + 2 = 0 \xrightarrow{x \leftrightarrow x-1} 4(x-1)^2 + 3(x-1) - 2 = 0 \Rightarrow 4x^2 - 5x - 1 = 0$$